

Pre-FFT と Post-FFT OFDM 適応アンテナアレーの等価性

姜 秉祐[†] 中村 理[†] 安達 文幸[‡]

東北大学大学院工学研究科電気・通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05

E-mail: [†] {kang, nakamura}@mobile.ecei.tohoku.ac.jp, [‡] adachi@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし 次世代の超高速無線伝送技術の一つとして直交周波数分割多重(OFDM)が注目されている。複数のユーザが同時に基地局にアクセスをする上りリンクでは、マルチアクセス干渉(MAI)が発生する。MAI を低減できれば、上りリンク伝送特性を改善し、リンク容量を向上できる。適応アンテナアレーは MAI を抑圧できる技術の一つとして知られている。OFDM 適応アンテナアレーは Pre-FFT 型と Post-FFT 型に分類される。Pre-FFT 型は FFT 演算を行う前にアレー重みの乗算と合成を行い、Post-FFT 型は FFT 演算後にアレー重みの乗算と合成を行う。本論文では、Pre-FFT 型と Post-FFT 型適応アンテナアレーの干渉電力最小アレー重みは等価であることを示し、両者の MAI 抑圧効果は同等であることを示している。またアレー重みの収束特性を計算機シミュレーションにより比較している。

キーワード 適応アンテナアレー, OFDM

Equivalence of Pre-FFT and Post-FFT OFDM Adaptive Antenna Array

Byeong-woo KANG[†] Osamu NAKAMURA[†] and Fumiyuki ADACHI[‡]

Dept. of Electrical and Communication Engineering, School of Engineering, Tohoku University

6-6-05 Aza-Aoba, Aramaki, Aoba-ku, Sendai, 980-8579 JAPAN

E-mail: [†] {kang, nakamura}@mobile.ecei.tohoku.ac.jp, [‡] adachi@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract Orthogonal frequency division multiplexing(OFDM) has been attracting much attention as the next generation wireless transmission technique. In the uplink, many users access the base station simultaneously and the multi-access interference (MAI) is produced. By suppressing the MAI, the uplink transmission performance can be improved and the link capacity can be increased as well. Adaptive antenna array is one of the well-known techniques for suppressing the MAI. Adaptive antenna array for OFDM is classified into 2 types: post-fast Fourier transform (FFT) type in which the array combining is done after FFT and pre-FFT type [4] in which the array combining is done before FFT. In this paper, it is shown that the minimum interference power array weights for post-FFT type and pre-FFT type are equivalent and hence, their MAI suppression effects are the same. The array weight convergence rate is evaluated by computer simulation.

Keyword Adaptive antenna array, OFDM

1. まえがき

次世代の移動通信では高速かつ高品質なデータ伝送が望まれている。しかし高速伝送では、チャンネルは遅延時間の異なる多数の遅延パスから構成されるようになるため、厳しい周波数選択性フェージングとなる[1]。このため、シングルキャリア伝送では符号間干渉 (ISI: Inter-symbol Interference) が生じてしまい、伝送特性が著しく劣化してしまう。そこで、多数の直交サブキャリアを用いて並列伝送を行うことで、周波数選択性フェージングの影響を克服しつつ周波数利用効率に優れた高速伝送を可能とする直交周波数分割多重 (OFDM: Orthogonal frequency division multiplexing) が注目を集めている[2]。もし、OFDM を用いて複数のユーザが同一の基地局に同時アクセスできれば周波数利用効率を向上できる。し

かし、同じ周波数帯域を用いて複数のユーザが同時通信を行うとマルチアクセス干渉 (MAI: Multi-access interference) が生じ、伝送特性が大幅に劣化してしまう。MAI を抑圧する技術の一つとして適応アンテナアレーが知られている[3]。適応アンテナアレーは複数のアンテナを用い、各アンテナにおける重みを制御することで、干渉を抑圧するビームパターンを形成する。OFDM 適応アンテナアレーは Pre-高速フーリエ変換 (FFT: Fast Fourier transform) 型[4]と Post-FFT 型に分類できる。Pre-FFT 型は FFT 演算の前にアレー合成し、Post-FFT 型は FFT 演算後、サブキャリア毎にアレー合成する。

本論文では、ラグランジュ未定係数法[6]を用い Pre-FFT 型と Post-FFT 型における干渉電力最小アレー重みを求め、また、計算機シミュレーションによ

りアレー重みの収束特性および伝送特性を比較する。

本論文の構成は以下のようになっている。第2章では Post-FFT 型と Pre-FFT 型の OFDM 適応アンテナアレーについて述べる。第3章でラグランジュ未定係数法[6]により干渉電力最小アレー重みを求める。第4章で Pre-FFT 型と Post-FFT 型の等価性を説明する。第5章に計算機シミュレーションによる重みの収束特性および伝送特性を示す。第6章はまとめである。

2. OFDM 適応アンテナアレー

図1に OFDM 適応アンテナアレーの受信機構成を示す。受信機には M 本のアンテナを用いるとする。チャンネルは L 個の離散パスで構成される周波数選択性ブロックフェージングチャンネルであるとする。また U 人のユーザが同時に基地局にアクセスする上りリンク通信を行う環境を仮定する。

時刻 t で受信された OFDM 信号をベクトル表示すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= [r_0(t), r_1(t), \dots, r_{M-1}(t)]^T, t = -N_g \sim N_c - 1 \\ &= \sum_{u=0}^{U-1} \sum_{l=0}^{L-1} \sqrt{2P_u} \mathbf{h}_{u,l} s_u(t - \tau_{u,l}) + \boldsymbol{\eta}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで P_u は第 u ユーザの平均電力, $\mathbf{h}_{u,l} = [h_{u,l,0}, h_{u,l,1}, \dots, h_{u,l,M-1}]^T$ は第 l パスの利得ベクトル, $\tau_{u,l}$ は第 u ユーザの第 l パスの遅延時間, $s_u(t)$ は第 u ユーザの送信 OFDM 信号, $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_0(t), \eta_1(t), \dots, \eta_{M-1}(t)]^T$ は雑音ベクトルである。本論文では、一般性を失うことなく、第 $u=0$ ユーザを希望ユーザとする。

2.1. Post-FFT 型適応アンテナアレー

Post-FFT 型の受信機では, N_c ポイント FFT 演算を行って, N_c 個の直交サブキャリア成分に分離する。第 k サブキャリアにおける受信信号ベクトル $\mathbf{R}(k)$ を表示すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(k) &= [R_0(k), R_1(k), \dots, R_{M-1}(k)]^T \\ &= \sum_{u=0}^{U-1} \sqrt{2P_u} \mathbf{H}_u(k) S_u(k) + \boldsymbol{\Pi}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $S_u(k)$ は第 u ユーザの送信信号の第 k サブキャリア成分, $\mathbf{H}_u(k) = [H_{u,0}(k), H_{u,1}(k), \dots, H_{u,M-1}(k)]^T$ は第 u ユーザのチャンネル利得ベクトル, $\boldsymbol{\Pi}(k) = [\Pi_0(k), \Pi_1(k), \dots, \Pi_{M-1}(k)]^T$ は雑音ベクトルを表し, $H_{u,m}(k)$ および $\Pi_m(k)$ は次式で表される。

$$\begin{cases} H_{u,m}(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{u,l,m} \exp(-j2\pi \frac{k\tau_l}{N_c}) \\ \Pi_m(k) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \eta_m(\tau) \exp(-j2\pi \frac{k\tau}{N_c}) \end{cases} \quad (3)$$

アレー合成出力 $Y(k)$ は

$$\begin{aligned} Y(k) &= \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{R}(k) \\ &= \sqrt{2P_0} \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{H}_0(k) S_0(k) + \sum_{u=1}^{U-1} \sqrt{2P_u} \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{H}_u(k) S_u(k) \\ &\quad + \mathbf{w}_{post}^T \boldsymbol{\Pi}(k) \end{aligned} \quad (4)$$

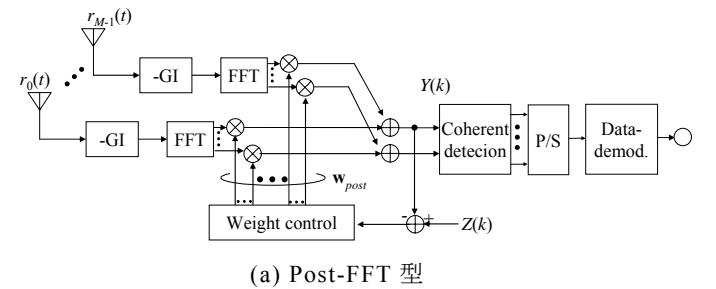
となる。ここで $\mathbf{w}_{post} = [w_{post}^0, w_{post}^1, \dots, w_{post}^{M-1}]^T$ は Post-FFT 型アレー重みベクトルである。式(4)の第1項は希望信号成分, 第2項は MAI 成分, 第3項は雑音成分である。同期検波, 並直列変換 (P/S 変換: Parallel-to-serial 変換) 後にデータ復調を行って受信データ系列を得る。

2.2. Pre-FFT 型適応アンテナアレー

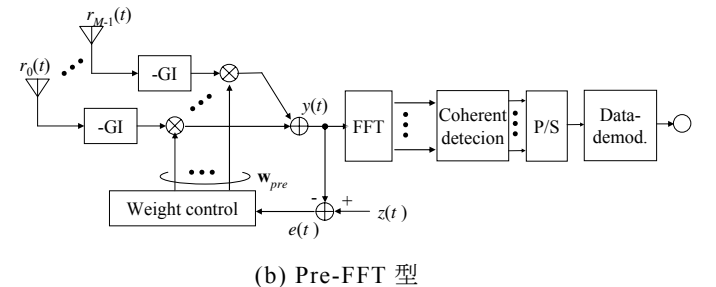
Pre-FFT 型の受信機では, FFT 演算の前に受信信号ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に Pre-FFT 型アレー重みベクトル $\mathbf{w}_{pre} = [w_{pre}^0, w_{pre}^1, \dots, w_{pre}^{M-1}]^T$ を乗算しアレー合成する。アレー合成出力 $y(t)$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{w}_{pre}^T \mathbf{r}(t) \\ &= \sqrt{2P_0} \mathbf{w}_{pre}^T \mathbf{h}_{0,l} s_0(t - \tau_{0,l}) + \sum_{u=1}^{U-1} \sqrt{2P_u} \mathbf{w}_{pre}^T \mathbf{h}_{u,l} s_u(t - \tau_{u,l}) \\ &\quad + \mathbf{w}_{pre}^T \boldsymbol{\eta}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。式(5)の第1項は希望信号, 第2項は MAI 成分, 第3項は雑音成分である。 N_c ポイント FFT 演算後, 同期検波, P/S 変換, データ復調を行い, 受信データ系列を得る。



(a) Post-FFT 型



(b) Pre-FFT 型

図1. OFDM 適応アンテナアレー受信機構成

3. 干渉電力最小アレー重み

干渉電力最小規範に基づくアレー重みを求めるとする。アレー合成出力における希望信号成分を参照信号として用いる[5]。Post-FFT 型における参照信号

$Z(k)$ と Pre-FFT 型における参照信号 $z(t)$ は次式のようになる.

$$\begin{cases} Z(k) = \sqrt{2P_0} \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{H}_0(k) S_0(k) & , \text{post-FFT} \\ z(t) = \sqrt{2P_0} \mathbf{w}_{pre}^T \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{h}_{0,l} s_0(t - \tau_{0,l}) & , \text{pre-FFT} \end{cases} \quad (6a) \quad (6b)$$

このような参照信号を用いたときの誤差信号 e は

$$e = \begin{cases} Z(k) - Y(k) = -\sum_{u=1}^{U-1} \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{H}_u(k) S(k) - \mathbf{w}_{post}^T \mathbf{\Pi}(k) & (7a) \\ z(t) - y(t) = -\sum_{u=1}^{U-1} \mathbf{w}_{pre}^T \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{h}_{u,l} s_u(t - \tau_{u,l}) - \mathbf{w}_{pre}^T \mathbf{\eta}(t) & (7b) \end{cases}$$

となる. アレー合成出力における雑音電力を常に一定に保つために, 拘束条件 $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{w} = 1$ を設ける.

最適アレー重みベクトル \mathbf{w} はラグランジュ未定係数法[6]を用いて導くことができる. 拘束条件 $\|\mathbf{w}\|^2 = 1$ の基での評価関数 $J(\mathbf{w})$ は次のように与えられる.

$$J(\mathbf{w}) = E[|e|^2] + \kappa(1 - \mathbf{w}^H \mathbf{w}) \quad (8)$$

ここで κ はラグランジュ未定係数である[6]. 式(7)を偏微分することにより最適アレー重み \mathbf{w}_{opt} を求めると, \mathbf{w}_{opt} は次式を満たすことが導かれる[付録].

$$(\mathbf{\Phi}_{ii} + \mathbf{\Phi}_{nn}) \mathbf{w}_{opt} = \kappa \mathbf{w}_{opt} \quad (9)$$

ここで $\mathbf{\Phi}_{ii}$ と $\mathbf{\Phi}_{nn}$ はそれぞれ M 行 M 列の干渉と雑音の相関行列であり, 次式のように表せる.

$$\mathbf{\Phi}_{ii} = \begin{cases} \sum_{u=1}^{U-1} 2P_u E[\mathbf{H}_u^*(k) \mathbf{H}_u^T(k)] & , \text{Post-FFT} \\ \sum_{u=1}^{U-1} \sum_{l=0}^{L-1} 2P_u E[\mathbf{h}_{u,l}^* \mathbf{h}_{u,l}^T] & , \text{Pre-FFT} \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{\Phi}_{nn} = \begin{cases} E[\mathbf{\Pi}^*(k) \mathbf{\Pi}^T(k)] & , \text{Post-FFT} \\ E[\mathbf{\eta}^*(t) \mathbf{\eta}^T(t)] & , \text{Pre-FFT} \end{cases} \quad (11)$$

式(9)よりラグランジュ未定係数 κ は $\mathbf{\Phi}_{ii} + \mathbf{\Phi}_{nn}$ の固有値に対応していることが分かる[6].

干渉電力と雑音電力の和 $I+N$ は次のように与えられる.

$$I+N = \mathbf{w}_{opt}^H (\mathbf{\Phi}_{ii} + \mathbf{\Phi}_{nn}) \mathbf{w}_{opt} = \kappa \quad (12)$$

式(12)より, 最適アレー重みベクトル \mathbf{w}_{opt} は $\mathbf{\Phi}_{ii} + \mathbf{\Phi}_{nn}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルであることが分かる. なお, 拘束条件 $\|\mathbf{w}\|^2 = 1$ により雑音電力 N は常に一定値となるから, 式(9)で与えられるアレー重みは干渉を最小とすることが分かる.

4. Pre-FFT 適応アンテナアレーと Post-FFT

適応アンテナアレーの等価性

第 u ユーザ第 l パスの到来角度は, 図 2 に示すように $\theta_{u,l}$ であるとする. 第 $m=0$ アンテナにおける第 l パスの利得が $h_{u,l}$ であるとき, 第 m アンテナにおける第 l パスの利得は

$$h_{u,l,m} = h_{u,l} \exp\left[j2\pi \frac{md}{\lambda_k} \cos\theta_{u,l}\right] \quad (13)$$

となる. ここで, 各サブキャリアの波長差が無視できるほど小さいとする ($\lambda_0 \approx \dots \approx \lambda_{N_c-1} = \lambda$). 各パスのパス利得の変動は独立であるから, 干渉信号の相関行列 $\mathbf{\Phi}_{ii}$ は, 次式のように Post-FFT 型と Pre-FFT 型で同じである.

$$\mathbf{\Phi}_{ii} = \sum_{u=1}^{U-1} 2P_u \begin{bmatrix} \Omega_{u,l} & \dots & \Omega_{u,l} A^{M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{u,l} A^{-(M-1)} & \dots & \Omega_{u,l} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで

$$\begin{cases} A = \exp(j \frac{2\pi d}{\lambda} \cos\theta_{u,l}) & (15a) \\ \Omega_{u,l} = E[|H_u|^2] = \sum_l E[|h_{u,l}|^2] & (15b) \end{cases}$$

であり, d はアンテナ間隔, λ は OFDM 帯域の中心サブキャリアの波長を表す. また雑音の相関行列 $\mathbf{\Phi}_{nn}$ も次式のように Post-FFT 型と Pre-FFT 型で同じである.

$$\mathbf{\Phi}_{nn} = \frac{2N_0}{T} \mathbf{I} \quad (16)$$

ここで N_0 は加法製白色ガウス雑音 (AWGN : Additive white gaussian noise) の片側電力スペクトル密度であり, T はサンプル間隔, \mathbf{I} は M 行 M 列の単位行列である. 以上より, 干渉最小アレー重みは Post-FFT 型と Pre-FFT 型で同じになることが分かる.

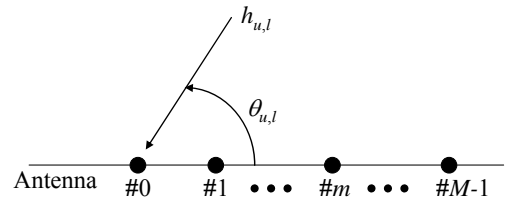


図 2. 第 u ユーザ第 l パスの到来角度

5. 計算機シミュレーション

5.1. シミュレーション条件

表 1 にシミュレーション条件を示す. QPSK データ

変調を仮定する．OFDMサブキャリア数は $N_c=1024$ であり，128 サンプルのGIを用いるものとする．また同時通信ユーザ数は4人であるものとする．16パス等電力プロファイルの周波数選択性ブロックレイリーフェージングのチャンネルを仮定し，1ユーザ当たりの平均信号対干渉電力比（SIR : Signal-to-interference power ratio）は0dBであるとする．各パスを構成する時間分解不可能な素波の角度広がり δ は 0° とし，16個のパスの到来角の広がり δ は 0° と 10° とする．受信アンテナ数は $M=4$ とし，図2のような直線配置であるとする．隣り合うアンテナ間の間隔は 0.5λ である．チャンネル推定は理想とする．

第4章で最適アレー重み \mathbf{w}_{opt} は $\Phi_{ii} + \Phi_{nn}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルであることを示した．固有ベクトル演算は演算量が多いため，本論文ではNLMSアルゴリズム[6]を用いてアレー重みを適応的に求める．Post-FFT型とPre-FFT型におけるNLMSアルゴリズムの更新式を次式に示す．

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{post,n+1} = \mathbf{w}_{post,n} + 2\mu e(n \bmod N_c) \frac{\mathbf{R}^*(n \bmod N_c)}{\|\mathbf{R}(n \bmod N_c)\|^2}, \text{Post-FFT} & (17a) \\ \mathbf{w}_{pre,n+1} = \mathbf{w}_{pre,n} + 2\mu e(n \bmod N_c) \frac{\mathbf{r}^*(n \bmod N_c)}{\|\mathbf{r}(n \bmod N_c)\|^2}, \text{Pre-FFT} & (17b) \end{cases}$$

表1 シミュレーション条件

Transmitter	Modulation	QPSK
	No. of subcarriers	$N_c = 1024$
	GI length	$N_g = 128$
	No. of users	$U = 4$
Channel	Fading	Frequency-selective block Rayleigh fading
	Power delay profile	$L = 16$ -path uniform power delay profile
	Time delay	$\tau_l = lT, l = 0 \sim L-1$
	Angle spread of unresolvable paths	0°
	Angle spread of resolvable paths	$\delta = 0^\circ, 10^\circ$
Receiver	Average received SIR	0dB
	No. of antennas	$M = 4$
	Antenna separation	$d = 0.5\lambda$
	Channel estimation	Ideal
	Step size of LMS	$\mu = 1/32$

5.2. シミュレーション結果

図3にアレー重みの収束特性を示す．第4章で求めた干渉電力最小アレー重み \mathbf{w}_{opt} と n 回の更新時のアレー重み $\mathbf{w}_{pre,n}$ または $\mathbf{w}_{post,n}$ の平均二乗誤差をプロットしている．1OFDMシンボルで1024回の更新が

可能であり，NLMSアルゴリズム[6]を用いても，図よりほぼ1OFDMシンボル時間内でアレー重みが収束していることが分かる．また，Post-FFT型アレーでは重みの誤差がPre-FFT型よりも若干大きいものの，両者ともほぼ同じ収束速度を有していることが分かる．図4にアレー重みの平均的な収束値を複素平面上に示した．Pre-FFT型とPost-FFT型の収束後のアレー重みは予想通りほとんど同じであることが分かる．

信号対干渉雑音電力比（SINR : Signal-to-interference-and-noise power ratio）を図5に示す．16個のパスの到来角の広がり δ が $\delta=10^\circ$ のときのSINR収束値が $\delta=0^\circ$ のときより小さい．これは， $\delta=0^\circ$ のときは，図6(a)に示したビームパターンから分かるように，全ての干渉を抑圧することができるが， $\delta=10^\circ$ のときには図5(b)のようにヌル点以外の方向から到来する干渉パスが存在し，残留干渉となるからである．

Post-FFT型とPre-FFT型アレーを用いたときの誤り率特性の比較を図7に示す．16個のパスの到来角の広がり δ が 0° の場合はPost-FFT型とPre-FFT型はほとんど同じ誤り率特性を示している．しかし， $\delta=10^\circ$ の場合は，干渉を十分に抑圧できないので，残留干渉により誤りフロアが発生している．

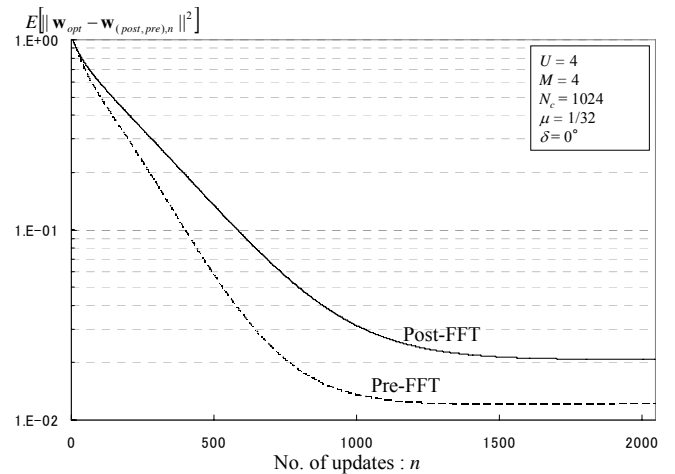


図3.アレー重みの収束特性

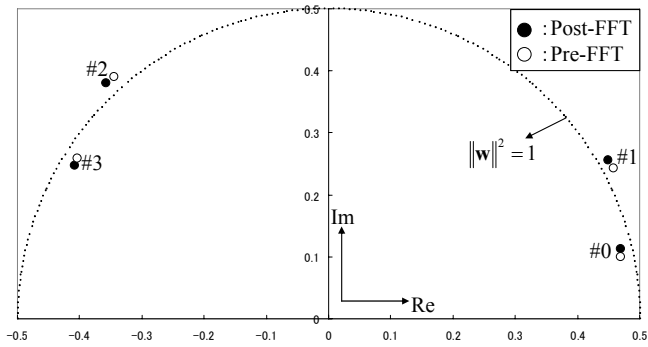


図 4. 収束後の Pre-FFT 型アレー重みと Post-FFT 型アレー重み

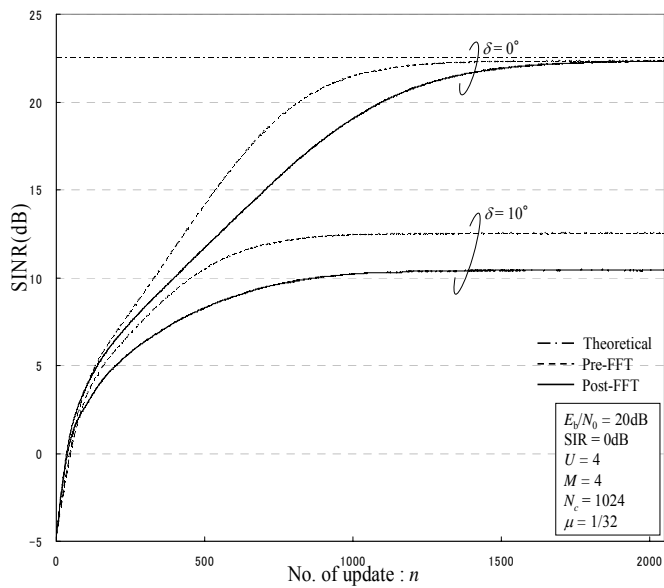


図 5. SINR

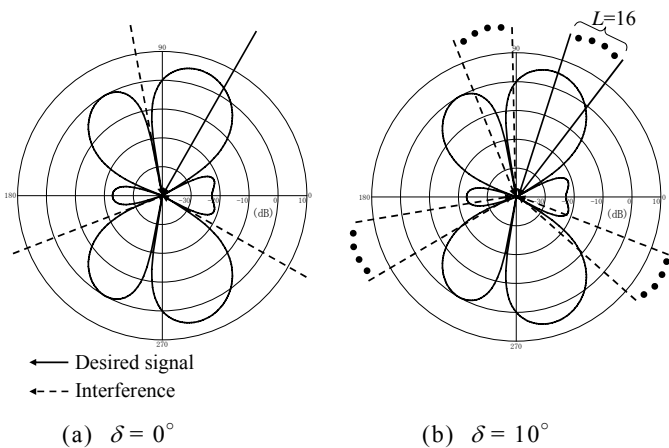


図 6. ビームパターン

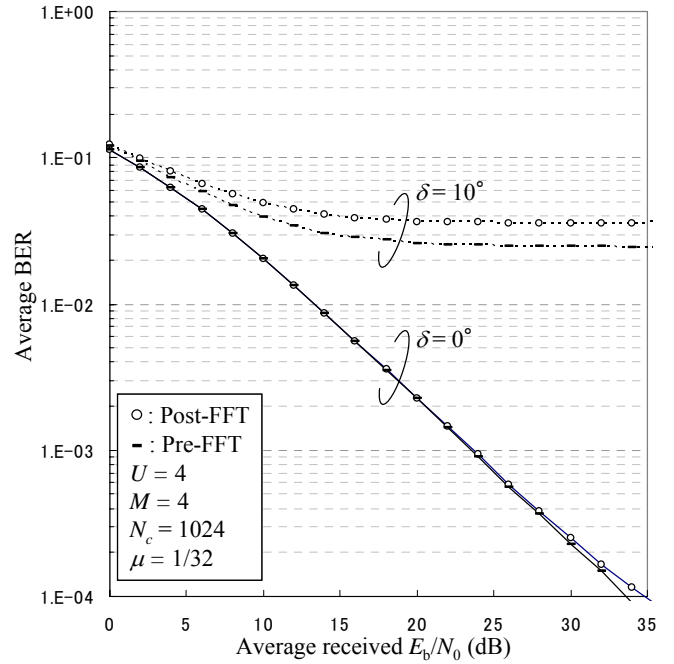


図 7. 誤り率特性

6. むすび

本論文では、干渉電力最小規範に基づく Post-FFT 型と Pre-FFT 型適応アンテナアレーの重みを理論的に導出した。最適アレー重みは干渉と雑音の和の相関行列の固有ベクトルであり、Post-FFT 型と Pre-FFT 型適応アンテナアレーは等価であることを明らかにした。NLMS アルゴリズムを用いアレー重みを適応的に更新する場合について、計算機シミュレーションより、アレー重みの収束特性を明らかにし、10FDM シンボル時間でほぼ収束することを示した。また、Post-FFT 型の BER 特性は Pre-FFT 型より若干劣化することが分かった。原因としては信号の変動が関係すると思われるが、はっきりした理由については今後の検討課題である。

文 献

- [1] W.C. Jakes Jr, Ed, *Microwave mobile communications*, Wiley, New York, 1974.
- [2] S. Hara and R. Prasad, *Multicarrier Techniques for 4G Mobile Communications*, Artech House, June 2003.
- [3] J.C. Liberti and T.S. Rappaport, *Smart Antennas for Wireless Communications : IS-95 & 3rd Generation CDMA Applications*, Prentice Hall, 1999.
- [4] M. Budsabathon, Y. Hara and S. Hara, "Optimum Beamforming for Pre-FFT OFDM Adaptive Antenna Array," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol.53, No.4, pp.945-955, July 2004.
- [5] Y. Suzuki, E. Kudoh and F. Adachi, "Impact of arrival angle spread of on adaptive antenna array and antenna diversity in DS-CDMA mobile radio,"

- [6] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed.,
Prentice Hall, 2001.

7. 付録

拘束条件 $\|\mathbf{w}\|^2 = 1$ の基での評価関数 $J(\mathbf{w})$ は次のよう
に与えられる.

$$J(\mathbf{w}) = E[|e|^2] + \kappa(1 - \mathbf{w}^H \mathbf{w}) \quad (\text{A1})$$

まず Post-FFT 型について \mathbf{w}_{opt} を求める. 式(A1)の第 1
項は次式のように求められる.

$$\begin{aligned} E[|e(k)|^2] &= E[|Z(k) - Y(k)|^2] \\ &= E\left[\left| -\sum_{u=1}^{U-1} S(k) \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{H}_u(k) S(k) - \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{\Pi}(k) \right|^2\right] \\ &= \mathbf{w}_{opt}^H \sum_{u=1}^{U-1} 2P_u E[\mathbf{H}_u^*(k) \mathbf{H}_u^T(k)] \mathbf{w}_{opt} \\ &\quad + \mathbf{w}_{opt}^H E[\mathbf{\Pi}^*(k) \mathbf{\Pi}^T(k)] \mathbf{w}_{opt} \\ &= \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{\Phi}_{ii} \mathbf{w}_{opt} + \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{\Phi}_{nn} \mathbf{w}_{opt} \\ &= \mathbf{w}_{opt}^H (\mathbf{\Phi}_{ii} + \mathbf{\Phi}_{nn}) \mathbf{w}_{opt} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となる. 式(A2)を式(A1)に代入し, \mathbf{w} で偏微分すると

$$\frac{\partial J_{array}(\mathbf{w}_{array})}{\partial \mathbf{w}_{array}} = 2\mathbf{\Phi}_{i+n} \mathbf{w}_{opt}^* - 2\kappa \mathbf{w}_{opt}^* \quad (\text{A3})$$

となる. $J(\mathbf{w})$ が最小となるのは $\partial J_{array}(\mathbf{w}_{array}) / \partial \mathbf{w}_{array} = \mathbf{0}$
のときなので, 干渉電力最小アレー重みは次式を満
たすことになる.

$$\mathbf{\Phi}_{i+n} \mathbf{w}_{opt} = \kappa \mathbf{w}_{opt} \quad (\text{A4})$$

Pre-FFT 型についても同様に, 式(A4)となることを
導くことができる.